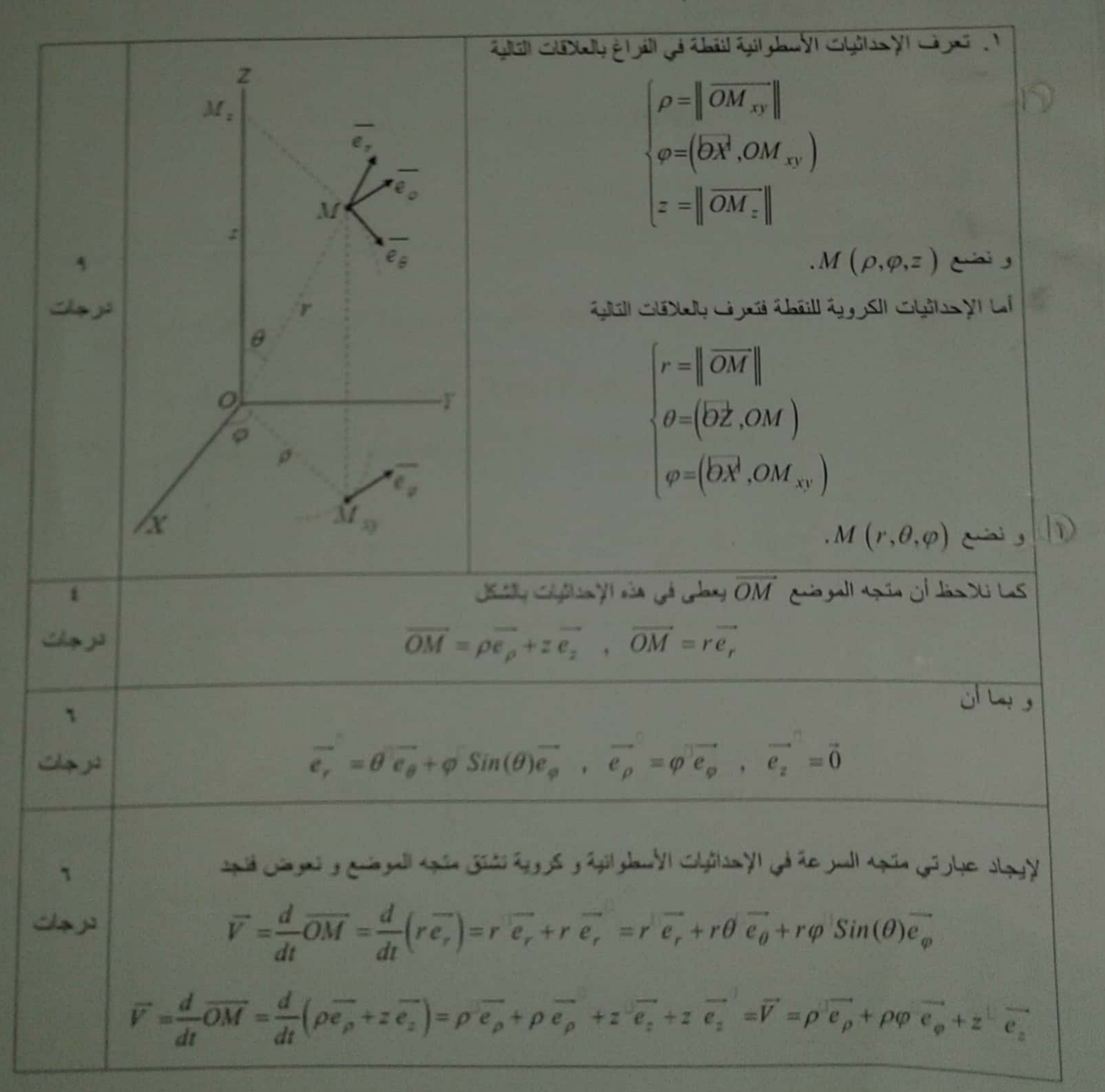
جامعة البعث / كلية العلوم / قسم الرياضيات

سلم تصحيح مادة الميكانيك (١)، لطلاب السنة الثانية / رياضيات

امتحان الدورة الإضافية للعام الدراسي ٢٠١٦ ـ ٢٠١٧

السؤال الأول: (٢٥ + ٢٥ = ٥٠ درجة)



١. تعرف الإحداثيات الأسطوانية لنقطة في الفراغ بالعلاقات التالية $\begin{cases} \rho = \left\Vert \overrightarrow{OM_{xy}} \right\Vert \\ \varphi = \left(\overrightarrow{OX}, OM_{xy}\right) \\ z = \left\Vert \overrightarrow{OM_z} \right\Vert \end{cases}$ و نضع $M(\rho,\varphi,z)$. أما الإحداثيات الكروية للنقطة فتعرف بالعلاقات التالية $\begin{cases} r = \left\Vert \overrightarrow{OM} \right\Vert \\ \theta = \left(\overrightarrow{OZ}, OM\right) \\ \varphi = \left(\overrightarrow{OX}, OM_{xy}\right) \end{cases}$ و نضع $M(r,\theta,\varphi)$.	٩ درجات
كما نلاحظ أن متجه الموضع $\overrightarrow{OM}$ يعطى في هذه الإحداثيات بالشكل $\overrightarrow{OM} = \rho\overrightarrow{e_\rho} + z\overrightarrow{e_z} \quad , \quad \overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{e_r}$	٤ درجات
و بما أن $\dot{\overrightarrow{e_r}} = \dot\theta\overrightarrow{e_\theta} + \dot\varphi\, Sin(\theta)\overrightarrow{e_\varphi} \quad , \quad \dot{\overrightarrow{e_\rho}} = \dot\varphi\overrightarrow{e_\varphi} \quad , \quad \dot{\overrightarrow{e_z}} = \vec{0}$	٦ درجات
لإيجاد عبارتي متجه السرعة في الإحداثيات الأسطوانية و كروية نشتق متجه الموضع و نعوض فنجد $\vec{V} = \frac{d}{dt}\overrightarrow{OM} = \frac{d}{dt}\left(r\overrightarrow{e_r}\right) = \dot r\overrightarrow{e_r} + r\dot{\overrightarrow{e_r}} = \dot r\overrightarrow{e_r} + r\dot\theta\overrightarrow{e_\theta} + r\dot\varphi\, Sin(\theta)\overrightarrow{e_\varphi}$ $\vec{V} = \frac{d}{dt}\overrightarrow{OM} = \frac{d}{dt}\left(\rho\overrightarrow{e_\rho} + z\overrightarrow{e_z}\right) = \dot\rho\overrightarrow{e_\rho} + \rho\dot{\overrightarrow{e_\rho}} + \dot z\overrightarrow{e_z} + z\dot{\overrightarrow{e_z}} \Rightarrow \vec{V} = \dot\rho\overrightarrow{e_\rho} + \rho\dot\varphi\overrightarrow{e_\varphi} + \dot z\overrightarrow{e_z}$	٦ درجات

Scanned by CamScanner

٢. نلاحظ أن

$$\begin{cases} \dot{x}=\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{dx}{d\theta}\times\dfrac{d\theta}{dt}=(Cos\theta-\theta\ Sin\theta)\left(\dfrac{k}{3\theta^2}\right)=k\,\dfrac{Cos\theta-\theta\ Sin\theta}{3\theta^2} \\ \dot{y}=\dfrac{dy}{dt}=\dfrac{dy}{d\theta}\times\dfrac{d\theta}{dt}=(Sin\theta+\theta\ Cos\theta)\left(\dfrac{k}{3\theta^2}\right)=k\,\dfrac{Sin\theta+\theta\ Cos\theta}{3\theta^2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$x\,\dot{y}-y\,\dot{x}=(\theta\ Cos\theta)k\,\frac{Sin\theta+\theta\ Cos\theta}{3\theta^2}-(\theta\ Sin\theta)k\,\frac{Cos\theta-\theta\ Sin\theta}{3\theta^2} \Rightarrow$$

$$x\,\dot{y}-y\,\dot{x}=\frac{k}{3}\left(Cos^2\theta+Sin^2\theta\right)=\frac{k}{3}=C$$

و بالتالي فإن حركة النقطة المعطاة خاضعة لقانون السطوح.

١٥ درجة

لإيجاد سرعة و تسارع الحركة نستخدم دستورا بينيه الأول و الثاني حيث نوجد أولاً الوسيطين ρ و φ كمايلي

$$\begin{cases} \rho=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(\theta\ Cos\theta)^2+(\theta\ Sin\theta)^2}=\theta \\ \varphi=ArcTan\left(\dfrac{y}{x}\right)=ArcTan\left(\dfrac{\theta\ Sin\theta}{\theta\ Cos\theta}\right)=ArcTan(Tan\theta)=\theta \end{cases} \Rightarrow$$

$$u=\frac{1}{\rho}=\frac{1}{\theta}=\frac{1}{\varphi} \quad\Rightarrow\quad u'_{\varphi}=-\frac{1}{\varphi^2} \quad \& \quad u''_{\varphi}=\frac{2}{\varphi^3}$$

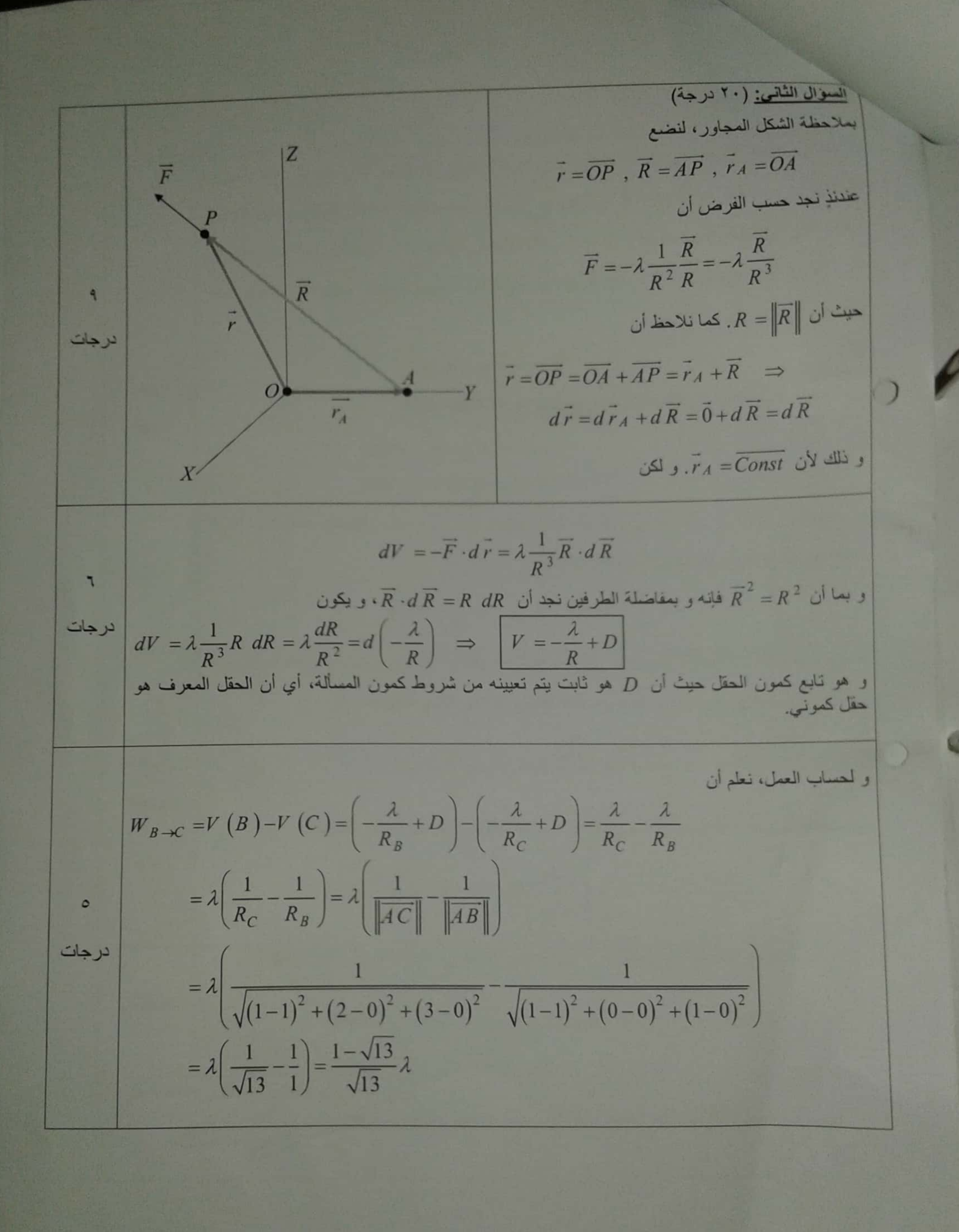
٥ درجات

و باستخدام دستورا بينيه نجد أن

$$\vec{V}=C\left(-\frac{du}{d\varphi}\overline{e_{\rho}}+u\,\overline{e_{\varphi}}\right)=\frac{k}{3}\left[-\left(-\frac{1}{\varphi^2}\right)\overline{e_{\rho}}+\left(\frac{1}{\varphi}\right)\overline{e_{\varphi}}\right]=\frac{k}{3\varphi}\left[\frac{1}{\varphi}\overline{e_{\rho}}+\overline{e_{\varphi}}\right]$$

$$\vec{\Gamma}=-C^2u^2\left(u''_{\varphi}+u\right)\overline{e_{\rho}}=-\frac{k^2}{9}\left(\frac{1}{\varphi^2}\right)\left(\frac{2}{\varphi^3}+\frac{1}{\varphi}\right)\overline{e_{\rho}}=-\frac{k^2}{9\,\varphi^5}\left(2+\varphi^2\right)\overline{e_{\rho}}$$

٥ درجات



السؤال الثاني: (٢٠ درجة)

بملاحظة الشكل المجاور، لنضع

$$\vec r=\overrightarrow{OP}\ ,\ \vec R=\overrightarrow{AP}\ ,\ \vec r_A=\overrightarrow{OA}$$

عندئذٍ نجد حسب الفرض أن

$$\vec F=-\lambda\frac{1}{R^2}\frac{\vec R}{R}=-\lambda\frac{\vec R}{R^3}$$

حيث أن $R=\left\|\vec R\right\|$. كما نلاحظ أن

$$\vec r=\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AP}=\vec r_A+\vec R\quad\Rightarrow$$

$$d\vec r=d\vec r_A+d\vec R=\vec 0+d\vec R=d\vec R$$

و ذلك لأن $\vec r_A=\overrightarrow{Const}$. و لكن

٩ درجات

$$dV=-\vec F\cdot d\vec r=\lambda\frac{1}{R^3}\vec R\cdot d\vec R$$

و بما أن $\vec R^2=R^2$ فإنه و بمفاضلة الطرفين نجد أن $\vec R\cdot d\vec R=R\ dR$، و يكون

$$dV=\lambda\frac{1}{R^3}R\ dR=\lambda\frac{dR}{R^2}=d\left(-\frac{\lambda}{R}\right)\quad\Rightarrow\quad\boxed{V=-\frac{\lambda}{R}+D}$$

و هو تابع كمون الحقل حيث أن D هو ثابت يتم تعيينه من شروط كمون المسألة، أي أن الحقل المعرف هو حقل كموني.

٦ درجات

و لحساب العمل، نعلم أن

$$W_{B\to C}=V(B)-V(C)=\left(-\frac{\lambda}{R_B}+D\right)-\left(-\frac{\lambda}{R_C}+D\right)=\frac{\lambda}{R_C}-\frac{\lambda}{R_B}$$

$$=\lambda\left(\frac{1}{R_C}-\frac{1}{R_B}\right)=\lambda\left(\frac{1}{\left\|\overrightarrow{AC}\right\|}-\frac{1}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\|}\right)$$

$$=\lambda\left(\frac{1}{\sqrt{(1-1)^2+(2-0)^2+(3-0)^2}}-\frac{1}{\sqrt{(1-1)^2+(0-0)^2+(1-0)^2}}\right)$$

$$=\lambda\left(\frac{1}{\sqrt{13}}-\frac{1}{1}\right)=\frac{1-\sqrt{13}}{\sqrt{13}}\lambda$$

٥ درجات

السؤال الثالث: (٣٠ درجة)

<table>
<tr>
<td>

نلاحظ أن حركة القذيفة هي حركة مستوية تقع في المستوي الشاقولي الذي يحوي متجه السرعة الابتدائية $\overrightarrow{v_0}$. باعتبار جملة مقارنة في مستوي الحركة مبدؤها نقطة إطلاق القذيفة و فيها المحور OX أفقي في اتجاه تقدم الحركة و المحور OY شاقولي صاعد و بملاحظة وجود قوتين مؤثرتين على القذيفة أثناء حركتها هما قوة ثقل القذيفة $m\,\vec{g}$ و قوة مقاومة الوسط $-\mu\,\vec{v}$ و بتطبيق المبدأ الأساسي في التحريك نجد أن

$$m\,\vec{g}-\mu\,\vec{v}=m\,\vec{\Gamma} \qquad (1)$$

و بالإسقاط على المحورين الإحداثيين نجد معادلات حركة القذيفة التالية

$$\begin{cases} OX: \quad 0-\mu\,\dot{x}=m\,\ddot{x} \\ OY: \quad -m\,g-\mu\,\dot{y}=m\,\ddot{y} \end{cases} \qquad (2)$$

و بتعويض $m=2\ ,\ v_0=100\ ,\ \alpha=\pi/6\ ,\ \mu=0.2\ ,\ g=10$، تصبح معادلات حركة القذيفة في المستوي حركة القذيفة XOY بالشكل

$$\ddot{x}=-\frac{1}{10}\dot{x}\ \ ,\ \ \ddot{y}=-10-\frac{1}{10}\dot{y}$$

</td>
<td>١٨
درجة</td>
</tr>
<tr>
<td>

باستخدام المعادلة التفاضلية الأولى في (2) و المكاملة بالنسبة للزمن مرتين و استخدام الشروط الابتدائية $\dot{x}_0=v_0\,Cos(\alpha)$ و $x_0=0$ نجد القانون الزمني الأول للحركة و هو

$$x=\frac{m}{\mu}v_0\,Cos(\alpha)\left(1-e^{-\frac{\mu}{m}t}\right)$$

و باستخدام المعادلة التفاضلية الثانية في (2) و حلها نجد القانون الزمني الثاني للحركة

$$y=\left[\frac{m\,v_0}{\mu}\,Sin(\alpha)+g\left(\frac{m}{\mu}\right)^2\right]\left(1-e^{-\frac{\mu}{m}t}\right)-\frac{m\,g}{\mu}\,t$$

</td>
<td>١٠
درجات</td>
</tr>
<tr>
<td>

و بالتعويض، تصبح المعادلات الزمنية لحركة القذيفة في المستوي حركة القذيفة XOY بالشكل

$$x=500\sqrt{3}\left(1-e^{-\frac{1}{10}t}\right)\ \ ,\ \ y=1500\left(1-e^{-\frac{1}{10}t}\right)-100\,t$$

</td>
<td>درجتان</td>
</tr>
</table>

مدرس المقرر: الدكتور محمد العلي	__________انتهى السلم (اربع صفحات)__________